Stetigkeit und Differenzierbarkeit

1. Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & (x,y) = (0,0) \\ \frac{x^2+y^2}{x^2+xy+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \end{cases}$$

   a) Ist f stetig?

   b) Ist f partiell differenzierbar? Wenn ja, gib die partiellen Ableitungen an!

   c) Ist f differenzierbar?

2. Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ durch

$$f(x,y) = (x(1-y), xy)$$

   Zeige mit der Definition der totalen Differenzierbarkeit, dass f im Nullpunkt total differenzierbar ist! Gib die Ableitung im Nullpunkt an!

3. Die Abbildung f sei gegeben durch $f(x,y,z) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$ für $x, y, z \neq 0$.

   a) Ist f stetig fortsetzbar an der Stelle $(0,0,0)$?

   b) Entwickle die Funktion f im Punkt $p = (2,1,4)$ in ein Taylorpolynom zweiten Grades.

   c) Bestimme die Gleichung der Tangentialebene von f an der Stelle $p = (2,1,4)$.

4. Gegeben sei die Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3+y^3}{|x|+|y|} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

   a) Zeige, dass alle Richtungsableitungen in $(0,0)$ gleich Null sind.

   b) Überprüfe die Aussage auf ihren Wahrheitswert: Die Richtungsableitungen existieren in allen Punkten auf der x-Achse.

5. Sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ die Funktion $f\left((x,y,z)^t\right) = \begin{pmatrix} x\sin(x+z) \\ \cos(x^2+y^2+z^2) \end{pmatrix}$.

   a) Berechne die Ableitung $Df\left((x,y,z)^t\right)$ in jedem beliebigen Punkt $(x,y,z)^t \in \mathbb{R}^3$.

   b) Berechne in jedem Punkt $(x,y,z)^t \in \mathbb{R}^3$ die Richtungsableitung $D_v f\left((x,y,z)^t\right)$ von f in Richtung des Vektors $v = (0,1,1)^t \in \mathbb{R}^3$.

Extremwertaufgaben

ohne Nebenbedingungen

1. Die Dichtefunktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ der zweidimensionalen Normalverteilung ist gegeben durch
$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}\left((x-3)^2+(y+6)^2\right)}$$
   a) Bestimme die lokalen Extrema und gib an, ob es sich um Maxima oder Minima handelt.

   b) Sind die in (a) gefundenen Extrema auch globale Extrema?

2. Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x, y) = (3 - \cos x - \cos y)^2$. Bestimme alle lokalen Minimumstellen, lokalen Maximumstellen und Sattelpunkte!

mit Nebenbedingungen

3. Gegeben sei die Menge $M := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \geq 36\}$.

   a) Entscheide (mit Begründung), ob die Menge M kompakt ist.

   b) Begründe, warum die Funktion $f : M \to \mathbb{R}$ mit
$$f(x, y, z) = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{6}$$
   auf M ihr Minimum annimmt.

   c) Bestimme - soweit existent - die (globalen) Maximum- und Minimumstellen von f auf M und den Wert des Maximums und des Minimums.

4. Rechteckige Plakate der Höhe a und Breite b werden bedruckt. Dabei bleiben aus technischen Gründen sowohl oben als auch unten ein Streifen von jeweils 10 cm sowie rechts und links ein Streifen von jeweils 5 cm unbedruckt. Die Gesamtfläche der Plakate ist 1 m^2 groß. Wie hoch und breit sollten die Plakate sein, damit die bedruckte Fläche maximal wird? Wie groß ist die bedruckte Fläche dann?

Integrale

Uneigentliche Integrale

1. Untersuche, ob die folgenden uneigentlichen Integrale existieren
$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$$
$$\int_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x.$$

2. Existiert das folgende Integral
$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{\sin x}}\,\mathrm{d}x?$$

3. Untersuche folgendes Integral auf Existenz für $s \neq 0$
$$\int_0^{\infty} \frac{1}{x^s + x^{\frac{1}{s}}}\,\mathrm{d}x.$$

4. Zeige, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ das Integral
$$\int_0^{\infty} x^n e^{-x}\,\mathrm{d}x$$
existiert und berechne den Wert in Abhängigkeit von n.

   Hinweis: Induktion.

5. Untersuche
$$\int_0^1 \frac{1}{\sin x}\,\mathrm{d}x$$
auf Existenz.

   Hinweis: Substitution und Minorantenkriterium

2. Mathe Nacht

Kurvenintegrale

6. Wir betrachten die Funktion

$$f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} : \quad f(x, y, z) = \frac{2y}{x} + 1$$

und die Kurve

$$\gamma : [1, 3] \to \mathbb{R}^3 : \quad \gamma(t) = \left(2t, t^2, \frac{1}{3}t^3\right)^T .$$

Berechne $\int_\gamma f(s)\,\mathrm{d}s$ und die Länge der Kurve. Begründe mittels einer geeigneten Abschätzung der Integranden, welcher Integralwert der größere von beiden ist.

7. Gegeben sei die Kurve

$$\gamma : [0, 1] \to \mathbb{R}, \quad \gamma(t) = \left(\frac{3t}{1 + t^3}, \frac{3t^2}{1 + t^3}\right)^T .$$

Man bestimme die Tangente an γ im Punkt $\gamma(1)$. Ferner bestimme man alle Punkte auf γ mit einer Tangente, welche parallel zu einer der beiden Koordinatenachsen ist.

8. Gegeben ist die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad f(x, y) = (2x + y,\, x + 1)^T .$$

   a) Berechne das Kurvenintegral von f über dem Halbkreis von $(0, -1)^T$ nach $(0, 1)^T$ mit Radius 1 durch $(1, 0)$.

   b) Berechne das Kurvenintegral von f über die Strecke von $(0, -1)^T$ nach $(0, 1)^T$.

   c) Existiert für f ein Potential? Welche Verbindung besteht zu den Resultaten aus (a) und (b)?

9. Gegeben sei die Kurve

$$\gamma(t) = \left(e^{ct}\cos(t),\, e^{ct}\sin(t)\right)$$

für $c > 0$.

   a) Berechne die Länge von γ auf $[0, 4\pi]$.

   b) Parametrisiere γ auf $[0, 4\pi]$ nach der Bogenlänge.

10. Gegeben sei die Kurve

$$\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2, \quad \gamma(t) = (r \cdot (t - \sin(t)),\, r \cdot (1 - \cos(t))) .$$

Berechne die Länge der ursprünglichen Kurve, abhängig von $r > 0$ konstant.

Hinweis: Nutze die trigonometrische Identität $\cos(2x) = 2\cos^2(x) - 1$.

Implizite Funktionen, Umkehrsatz

1. Zeige, dass sich in einer Umgebung des Punktes $(0, 1)$ die Gleichung
$$2\sin(x) + \mathrm{e}^{\sin(xy)} = x + y$$
nach $x = \phi(y)$ auflösen lässt. Zeige weiterhin, dass ϕ differenzierbar ist und dass $\phi(1) = 0$ ist. Bestimme außerdem das Taylorpolynom erster Ordnung zu ϕ mit Entwicklungspunkt $y_0 = 1$.

2. Sei $f(x, y) = \mathrm{e}^{\sin(xy)} + x^2 - 2y - 1$. Zeige, dass sich die Gleichung $f(x, y) = 0$ für hinreichend kleine x und y nach y auflösen lässt.

3. Sei $g(x, y, z) = \begin{pmatrix} -2x^2 + y^2 + z^2 \\ x^2 + \mathrm{e}^{y-1} - 2y \end{pmatrix}$. Zeige, dass es eine Umgebung um den Punkt $(1, 1, 1)$ gibt, sodass sich $g(x, y, z) = 0$ lokal nach (y, z) auflösen lässt, d.h. es gibt dort Funktionen $y(x)$ und $z(x)$, sodass $g(x, y(x), z(x)) = 0$ gilt.

4. Sei $F(x, y, z) := x^4 + 2x\cos(y) + \sin(z)$. Zeige, dass für hinreichend kleine x, y, z die Gleichung $F(x, y, z) = 0$ nach z aufgelöst werden kann und berechne $\partial z/\partial x$ und $\partial z/\partial y$.

5. Ist die Funktion $f(x, y) := \begin{pmatrix} \mathrm{e}^x \cos(y) \\ \mathrm{e}^x \sin(y) \end{pmatrix}$ lokal in jedem Punkt des $\mathbb{R}^2$ umkehrbar? Kann man daraus die globale Umkehrbarkeit folgern?

6. Zeige, dass das Gleichungssystem
$$\begin{aligned} \mathrm{e}^x + \arctan(y) &= 1 \\ x^2 + (z^3 + z) &= 0 \end{aligned}$$
eine implizite Lösung in Form von Funktionen $y(x)$ und $z(x)$ in einer Umgebung von $(0, 0, 0)$ hat. Überprüfe die Funktionen $y(x)$ und $z(x)$ auf Monotonie im Punkt $x = 0$.

7. Wahr oder falsch:

   a) Wenn $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ein lokaler Diffeomorphismus ist, dann ist f injektiv.

   b) Wenn $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ein lokaler Diffeomorphismus ist, dann ist f injektiv.

8. Zeige, dass das Gleichungssystem
$$\begin{aligned} x^2 + y^2 - u^2 - v^2 &= 0 \\ x^2 + 2y^2 + 3u^2 + 4v^2 &= 10 \end{aligned}$$
durch positive Funktionen $u(x, y)$ und $v(x, y)$ aufgelöst werden kann und berechne die partiellen Ableitungen von u und v.

2. Mathe Nacht

Allgemeine Aussagen zu Topologie u.v.m.

Wahr oder Falsch

1. Welche der folgenden Aussagen sind wahr, welche sind falsch? Begründe!

   a) Einelementige Mengen im $\mathbb{R}^n$ sind stets zusammenhängend.

   b) Wenn $A \subset \mathbb{R}^n$ ist mit ∂A kompakt, dann ist A beschränkt.

   c) Ist $A \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt, dann ist ∂A kompakt.

   d) Ist $A \subset \mathbb{R}^n$ offen und $U \subset A$ in A offen, so ist U offen (in $\mathbb{R}^n$).

   e) Ist $A \subset \mathbb{R}^n$ abgeschlossen und $U \subset A$ in A abgeschlossen, dann ist U abgeschlossen (in $\mathbb{R}^n$).

   f) Ist $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ stetig, so gilt für $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^n$ offen, dass auch $f(\mathcal{O})$ offen ist.

Beweise

2. Gegeben sei $Y := \{\frac{1}{k} \mid k \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{R}$. Was ist ∂Y, $\mathring{Y}$, $\overline{Y}$?

3. Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ eine Abbildung. Zeige:

   f ist stetig in $a \in \mathbb{R}^n$ $\Leftrightarrow$ Für alle Umgebungen $V \subset \mathbb{R}^n$ von $f(a)$ existiert eine Umgebung $U \subset \mathbb{R}^n$ von a mit $f(U) \subset V$.

4. $A \subset \mathbb{R}^n$ ist zusammenhängend $\Leftrightarrow$ A und $\emptyset$ sind die einzigen Teilmengen von A, die sowohl offen als auch abgeschlossen sind.